

# 单元素养测评卷(一)

## 第六章

(时间:120分钟 分值:150分)

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知点  $A(-1,2)$  和向量  $\mathbf{a}=(1,3)$ , 且  $\overrightarrow{AB}=2\mathbf{a}$ , 则点  $B$  的坐标为 ( )

- A.  $(1,8)$                       B.  $(0,5)$   
C.  $(-3,-4)$                   D.  $(3,4)$

2. 等边三角形  $ABC$  的边长为1,  $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ , 则  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$  ( )

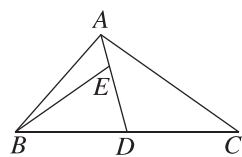
- A.  $-\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 设  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  是平面内的一个基底, 则下面四组向量不能构成平面内的一个基底的是 ( )

- A.  $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$                       B.  $3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$  和  $2\mathbf{e}_2 - 6\mathbf{e}_1$   
C.  $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_1$                       D.  $\mathbf{e}_1$  和  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

4. 如图所示, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$  是边  $BC$  的中点,  $E$  是线段  $AD$  上靠近点  $A$  的三等分点, 则  $\overrightarrow{BE} =$  ( )

- A.  $\frac{5}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$   
B.  $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$   
C.  $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$   
D.  $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



5. [2024·浙南联盟高一期中] 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $a=x, b=2, B=60^\circ$ , 若  $\triangle ABC$  有两解, 则  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $2 < x < 2\sqrt{3}$                       B.  $2 < x < \frac{4\sqrt{3}}{3}$   
C.  $\sqrt{3} < x < 2$                       D.  $2 < x < \frac{5\sqrt{3}}{3}$

6. 已知向量  $\mathbf{a}=(1, -\sqrt{3})$ ,  $|\mathbf{b}|=1$ , 且  $(\mathbf{a}-2\mathbf{b}) \cdot (2\mathbf{a}+\mathbf{b})=3$ , 则  $\mathbf{a}+2\mathbf{b}$  在  $\mathbf{a}$  上的投影向量的坐标是 ( )

- A.  $(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$                       B.  $(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$   
C.  $(-\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$                       D.  $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

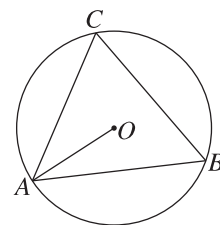
7. 已知  $\triangle ABC$  的三边  $a, b, c$  满足  $a^3 + b^3 = c^3$ , 则此三角形是 ( )

- A. 钝角三角形                      B. 锐角三角形  
C. 直角三角形                      D. 等腰直角三角形

8. 如图,  $O$  是锐角三角形  $ABC$  外接圆的圆心, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,

且  $A = \frac{\pi}{3}$ , 若  $\frac{\cos B}{\sin C} \overrightarrow{AB} + \frac{\cos C}{\sin B} \overrightarrow{AC} = 2m\overrightarrow{AO}$ , 则  $m =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       D. 1



二、选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. 下列说法中正确的有 ( )

- A. 若  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$ , 则  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$   
B. 方向相反的两个非零向量一定共线  
C. 若  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$  且  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  同向, 则  $\mathbf{a} > \mathbf{b}$   
D. “ $A, B, C, D$  是不共线的四个点, 且  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ” 是“四边形  $ABCD$  是平行四边形”的充要条件

10. 在  $\triangle ABC$  中,  $a, b, c$  分别为内角  $A, B, C$  的对边, 则下列说法正确的是 ( )

- A. 若  $\frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\cos A}$ , 则  $\triangle ABC$  为等腰三角形  
B. 若  $A > B$ , 则  $\sin A > \sin B$   
C. 若  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$ , 则  $\triangle ABC$  为钝角三角形  
D. 若  $A + B < C$ , 则  $\sin^2 A + \sin^2 B < 1$

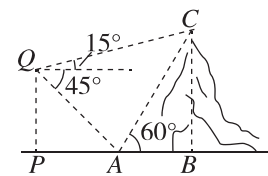
11. [2024·山东省实验中学高一月考]  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2, a = 2$ , 则 ( )

- A.  $b \cos A = 2$   
B.  $b^2 + c^2 = 8$   
C. 角  $A$  的最大值为  $\frac{\pi}{3}$   
D.  $\triangle ABC$  面积的最小值为  $\sqrt{3}$

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. [2024·菏泽一中高一月考] 已知向量  $\mathbf{a} = (-1, 2), \mathbf{b} = (1, t)$ , 若  $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ , 则实数  $t$  的值为 \_\_\_\_\_.

13. 如图, 某山的高度  $BC = 300$  m, 一架无人机在  $Q$  处观测到山顶  $C$  的仰角为  $15^\circ$ , 地面上  $A$  处的俯角为  $45^\circ$ , 若  $\angle BAC = 60^\circ$ , 则此无人机距离地面的高度  $PQ$  为 \_\_\_\_\_ m.



14. [2024·长郡中学高一月考] 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 4, AC = 3, \angle BAC = 90^\circ$ ,  $D$  在边  $BC$  上(不包括端点), 延长  $AD$  到  $P$ , 使得  $AP = 9$ , 若  $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB} + (\frac{3}{2} - m)\overrightarrow{PC}$  ( $m$  为常数), 则  $CD$  的长度为 \_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分) 已知向量  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{b} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ , 其中  $\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ .

- (1) 求  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  及  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ ;  
(2) 求向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  夹角的余弦值.



16. (15分) 已知  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边,  $a = b \cos C + c \sin B$ .

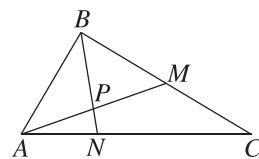
(1) 求  $B$ ;

(2) 若  $b = \sqrt{5}, c = \sqrt{2}$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

17. (15分) 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = 2, AC = 4, \angle BAC = 60^\circ$ ,  $M$  是  $BC$  的中点,  $N$  是  $AC$  上的点, 且  $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$ ,  $AM, BN$  相交于点  $P$ . 设  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ .

(1) 若  $x = \frac{1}{3}$ , 试用向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  表示  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{PN}$ ;

(2) 若  $AM \perp PN$ , 求实数  $x$  的值.



18. (17分) 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ , 且  $4a \sin A = b \sin C \cos A + c \sin A \cos B$ .

(1) 求  $\frac{\sin A}{\sin C}$  的值.

(2) 设  $D$  是  $AC$  边上的点, 且  $BD$  在  $\angle ABC$  的平分线上.

(i) 证明:  $BD^2 = BA \cdot BC - DA \cdot DC$ ;

(ii) 若  $a = 1$ , 求  $BD \cdot AC$  的最大值.

19. (17分) [2024 · 丽水五校高一期中] 设平面内两个非零向量  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  的夹角为  $\theta$ , 定义一种运算 “ $\otimes$ ”:  $\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} = |\mathbf{m}| |\mathbf{n}| \sin \theta$ . 试求解下列问题:

(1) 已知向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足  $\mathbf{a} = (2, 1), |\mathbf{b}| = 2, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4$ , 求  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  的值;

(2) 在平面直角坐标系中, 已知点  $A(2, 1), B(-1, 2), C(0, 4)$ , 求  $\overrightarrow{AB} \otimes \overrightarrow{BC}$  的值;

(3) 已知向量  $\mathbf{i} = \left(\frac{1}{\cos \alpha}, \frac{2}{\sin \alpha}\right), \mathbf{j} = \left(\frac{2}{\sin \alpha}, -\frac{1}{\cos \alpha}\right), \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 求  $\mathbf{i} \otimes \mathbf{j}$  的最小值.